Equipo Docente: TANIA N. GIMENEZ • LUIS A. MICUCCI • PABLO GIROLLET

Trabajo Práctico N^{ro} 1. Números Reales y sus propiedades.

Ej. 1 — Indicar a qué conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) pertenecen los siguientes números:

a. 0 **b.** $\frac{4}{3}$ **c.** $\sqrt{3}$ **d.** $\frac{623}{319}$ **e.** $-\frac{5}{8}$ **f.** π

Ej. 2 — Indicar si las siguientes fracciones son irreducibles e indicar dos fracciones equivalentes.

a. $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{20}{5}$ **c.** $\frac{4}{3}$ **d.** $\frac{30}{6}$ **e.** $\frac{2}{23}$ **f.** $\frac{7}{21}$

Ej. 3 — Convertir a fracción los siguientes números decimales periódicos.

a. $15,\widehat{6}$ **b.** $34,\widehat{28}$ **c.** $11,3\widehat{5}$ **d.** $73,2\widehat{15}$

Ej. 4 — Dibujar en la recta real cada uno de los valores dados en el **Ej. 1**.

Ej. 5 — Indicar la propiedad de los números reales en la que se basa cada igualdad:

a. $8x+y=y+8x$ **b.** $6(4x+1)=24x+6$

c. $(x+a)(x+b)=(x+a)x+(x+a)b$ **d.** $(x+y)+3z=x+(y+3z)$

Ej. 6 — Utilizar las propiedades de los números reales para escribir la expresión sin paréntesis.

a. $6(x+4)$ **b.** $3(2x-9)$ **c.** $(x+1)(x+4)$ **d.** $(x+y)(6y)$

Ej. 7 — Efectuar las operaciones indicadas y expresar el resultado como una fracción irreducible.

a. $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}$ **b.** $\frac{20}{5}\cdot\frac{15}{8}$ **c.** $\frac{4}{3}-\frac{5}{6}+2$

d. $\left(\frac{12}{6}+\frac{8}{3}\right)\left(\frac{12}{6}-\frac{8}{3}\right)$ **e.** $\frac{2}{6}\div\frac{3}{8}$ **f.** $\dfrac{\frac{7}{21}+\frac{1}{7}}{7}$

Ej. 8 — Simplificar las siguientes expresiones.

a. $4-(-5)$ **b.** $-4-(-5)$ **c.** $4(-5)$ **d.** $4+(-5)$

e. $(-4)-(-5)$ **f.** $-4(-5)$ **g.** $-(4-(-5))$ **h.** $4[3(x+1)-2]$

i. $3(y-2x)+2(3x-3y)$ **j.** $-z(z+2)+2(1-z)$

Solución del ejercicio 1

Vamos a determinar a qué conjunto numérico pertenece cada valor dado: $\mathbb{N}$ (naturales), $\mathbb{Z}$ (enteros), $\mathbb{Q}$ (racionales), $mathbbI$ (irracionales) o $\mathbb{R}$ (reales).

Recordemos las definiciones:

- $\mathbb{N}$ (Números naturales): $\{1, 2, 3, \ldots\}$ – algunos textos incluyen el 0, pero aquí nosotros no lo incluiremos.
- $\mathbb{Z}$ (Números enteros): $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{Q}$ (Números racionales): son los números que se pueden expresar como fracciones de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.
- $\mathbb{I}$ (Números irracionales): son los números que **no** se pueden expresar como fracciones.

  Los conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ no tienen elementos en común (son conjuntos *disjuntos*).
- $\mathbb{R}$ (Números reales): todos los números, incluidos racionales e irracionales. Resultan de la unión de estos dos conjuntos.

Analicemos cada caso:

a. 0: es un número entero sin decimales ni fracción. Pertenece a $\mathbb{Z}$ (algunos libros lo consideran como parte de $\mathbb{N}$), $\mathbb{Q}$ (como $\frac{0}{1}$) y $\mathbb{R}$. Conjunto más específico: $\mathbb{Z}$.

b. $\frac{4}{3}$: es una fracción con numerador y denominador enteros (4 y 3). No es natural ni entero, pero sí racional. Pertenece a $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Conjunto más específico: $\mathbb{Q}$.

c. $\sqrt{3}$: la raíz cuadrada de 3 no se puede expresar como fracción de enteros; es un número irracional. No pertenece a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ni $\mathbb{Q}$, pero sí a $\mathbb{R}$. Conjunto más específico: $\mathbb{I}$.

d. $\frac{623}{319}$: es una fracción de dos enteros (623 y 319). No es natural ni entero (resultado aproximado: $1,953\ldots$), pero sí racional. Pertenece a $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Conjunto más específico: $\mathbb{Q}$.

e. $-\frac{5}{8}$: es una fracción con numerador y denominador enteros (-5 y 8). No es natural (negativo), ni entero, pero sí racional. Pertenece a $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Conjunto más específico: $\mathbb{Q}$.

f. π: es un número irracional, no se puede expresar como fracción de enteros. No pertenece a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ni $\mathbb{Q}$, pero sí a $\mathbb{I}$ y a $\mathbb{R}$. Conjunto más específico: $\mathbb{I}$.

Solución del ejercicio 2

Vamos a resolver este ejercicio paso a paso. Primero, determinaremos si cada fracción es irreducible (es decir, si el *numerador* y el *denominador* de la fracción no tienen factores comunes mayores a 1, o equivalentemente, si su *máximo común divisor*, MCD, es 1). Luego, proporcionaremos dos fracciones equivalentes para cada caso. Una forma sencilla de obtenerlas es multiplicando numerador y denominador por números enteros positivos (por ejemplo, 2 y 3).

a. $\frac{2}{3}$: es irreducible $(\text{MCD}(2, 3) = 1)$. Equivalentes: $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}$.

b. $\frac{20}{5}$: no es irreducible $(\text{MCD}(20, 5) = 5)$. Equivalentes: $\frac{40}{10}, \frac{60}{15}$.

c. $\frac{4}{3}$: es irreducible $(\text{MCD}(4, 3) = 1)$. Equivalentes: $\frac{8}{6}, \frac{12}{9}$.

d. $\frac{30}{6}$: no es irreducible $(\text{MCD}(30, 6) = 6)$. Equivalentes: $\frac{60}{12}, \frac{90}{18}$.

e. $\frac{2}{23}$: es irreducible $(\text{MCD}(2, 23) = 1)$. Equivalentes: $\frac{4}{46}, \frac{6}{69}$.

f. $\frac{7}{21}$: no es irreducible $(\text{MCD}(7, 21) = 7)$. Equivalentes: $\frac{14}{42}, \frac{21}{63}$.

Solución del ejercicio 3

El proceso formal de conversión de un número decimal periódico a fracción utiliza un método algebraico que requiere de ciertos conocimientos matemáticos: se define el número en cuestión como una variable, se multiplica luego por una o más potencias de 10 adecuadas para alinear las partes periódicas, y finalmente se restan las ecuaciones resultantes y se resuelve.
En nuestro caso, y con el objetivo simplificar el proceso para representar un número decimal periódico como fracción, utilizaremos una secuencia de pasos informales que no requieren de conocimientos matemáticos avanzados. Tenga en cuenta no obstante, que esto no es una demostración ni un desarrollo formal del proceso, sino tan solo una *regla mnemotécnica* o sucesión de pasos a seguir para facilitarle a usted dicha representación.

1. **Identificar el patrón**
   - Observe el número decimal y busque si hay un grupo de dígitos que se repiten continuamente. Este grupo se llama **bloque periódico**.
   - Si el número decimal tiene una parte no periódica antes del bloque periódico, anótela también.
2. **Convertir el número a una fracción**
   - **Para decimales periódicos puros (sin parte entera ni parte no periódica)**:
     - Arme una fracción.
     - En el numerador copie tal cual los números que forman el bloque periódico (números debajo del *arco* de período).
     - En el denominador escriba tantos "nueves" como números formen el bloque periódico.
     - Reduzca la fracción a su mínima expresión (simplifique).

     Ejemplo:
     - Número: $0,454545\ldots$
     - Bloque periódico: 45.
     - **Escritura de la fracción**:
       - **Numerador**: 45.
       - **Denominador**: 99
       - **Fracción reducida**: $\frac{45}{99} = \frac{5}{11}$

3. **Para decimales periódicos mixtos (con parte entera y parte no periódica)**:

   - Arme una fracción.
   - En el numerador arme un número formado por todos los números de la parte entera del decimal, los números del bloque no periódico (números detrás de la coma decimal y fuera del *arco*) y los números del bloque periódico (número debajo del *arco*). A este número réstele el número formado por la parte entera seguida de los números del bloque no periódico.
   - En el denominador deberá formar un número escrito por nueves y ceros. Escriba tantos “nueves” como números formen el bloque periódico y luego escriba tantos ceros como números del bloque no periódico haya (no agrege ceros por los número fuera del arco periódico pero que forman la parte entera del número decimal).
   - Reduzca la fracción a su mínima expresión (simplifique).

   Ejemplo:

   – Número: $2,52312312\ldots$
   – Parte entera del número: 2.
   – Bloque no periódico: 5 (tiene 1 sólo dígito: 5).
   – Bloque periódico: 231 (tiene 3 dígitos: 2, 3 y 1).
   – **Escritura de la fracción**:
     ⋆ **Numerador**: $25\,231 - 25 = 25206$.
     ⋆ **Denominador**: 9990
     ⋆ **Fracción reducida**:

$$\frac{\cancel{25\,206}^{\,4201}}{\cancel{9990}^{\,1665}} = \frac{4201}{1665}$$

`Simplificando el numerador y el denominador (dividimos ambos entre 6).`

Graficamente:

$$\frac{\overbrace{25\,231}^{\text{parte entera+parte no periódica+parte periódica}} - \overbrace{25}^{\text{parte entera + parte no periódica}}}{\underbrace{999}_{\text{tantos “nueves” como dígitos tenga la parte periódica}}\ \underbrace{0}_{\text{tantos “ceros” como dígitos tenga la parte no periódica}}} = \frac{25\,206}{9990} = \frac{4201}{1665}$$

Vamos a convertir cada número decimal periódico de nuestro ejercicio a una fracción siguiendo paso a paso el proceso explicado.

a. $15,\widehat{6}$:

- Número: $15,666666\ldots$
- Parte entera del número: 15.
- Bloque no periódico: no tiene.
- Bloque periódico: 6.
- **Escritura de la fracción**:

- **Numerador**: $156 - 15 = 141$.
- **Denominador**: 9
- **Fracción reducida**: $\dfrac{\cancel{141}^{47}}{\cancel{9}_{3}} = \dfrac{47}{3}$

Resultado: $\boxed{\dfrac{47}{3}}$.

b. $34,\widehat{28}$:

- Número: $34,282828\ldots$
- Parte entera del número: 34.
- Bloque no periódico: No tiene.
- Bloque periódico: 28.
- **Escritura de la fracción**:
  - **Numerador**: $3428 - 34 = 3394$.
  - **Denominador**: 99
  - **Fracción reducida**: $\dfrac{3394}{99}$ (fracción irreducible)

Resultado: $\boxed{\dfrac{3394}{99}}$.

c. $11,3\widehat{5}$:

- Número: $11,355555\ldots$
- Parte entera del número: 11.
- Bloque no periódico: 3.
- Bloque periódico: 5.
- **Escritura de la fracción**:
  - **Numerador**: $1135 - 113 = 1022$.
  - **Denominador**: 90
  - **Fracción reducida**: $\dfrac{\cancel{1022}^{511}}{\cancel{90}_{45}} = \dfrac{511}{45}$

Resultado: $\boxed{\dfrac{511}{45}}$.

d. $73,2\widehat{15}$:

- Número: $73,2151515\ldots$
- Parte entera del número: 73.
- Bloque no periódico: 2.
- Bloque periódico: 15.
- **Escritura de la fracción**:
  - **Numerador**: $73215 - 732 = 72483$.
  - **Denominador**: 990

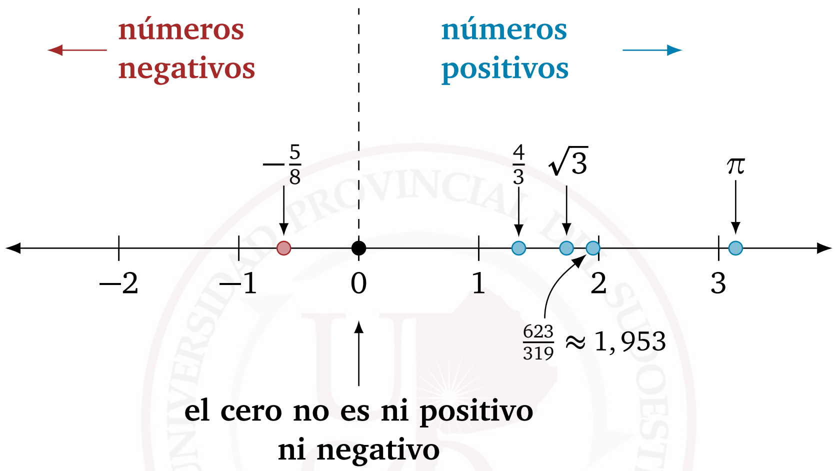
– **Fracción reducida:** $\dfrac{\cancel{72483}^{\,24161}}{\cancel{990}^{\,330}} = \dfrac{24161}{330}$

Resultado: $\boxed{\dfrac{24161}{330}}$.

En resúmen:

a. $15,\widehat{6} = \dfrac{47}{3}$ **b.** $34,2\widehat{8} = \dfrac{1543}{45}$ **c.** $11,3\widehat{5} = \dfrac{511}{45}$ **d.** $73,2\widehat{15} = \dfrac{24161}{330}$

Solución del ejercicio 4



Solución del ejercicio 5

A continuación, se identifican las propiedades de los números reales utilizadas en cada expresión:

a. $8x + y = y + 8x$
Propiedad Conmutativa de la Suma: el orden de los sumandos no afecta el resultado.

b. $6(4x + 1) = 24x + 6$
Propiedad Distributiva: el factor 6 se distribuye sobre la suma $4x + 1$.

c. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$
Propiedad Distributiva: el factor $x + a$ se distribuye sobre $x + b$.

d. $(x + y) + 3z = x + (y + 3z)$
Propiedad Asociativa de la Suma: la agrupación de los sumandos no cambia el resultado.

Solución del ejercicio 6

Utilizando la propiedad distributiva podemos reescribir las expresiones sin paréntesis. A continuación, se presentan los resultados:

a. $6(x + 4) = 6x + 24$

b. $3(2x - 9) = 6x - 27$

c. $(x + 1)(x + 4) = x^2 + 4x + x + 4 = x^2 + 5x + 4$

d. $(x + y)(6y) = 6xy + 6y^2$

Solución del ejercicio 7

A continuación se presentan los resultados de las operaciones indicadas, expresados como fracciones irreducibles:

a. $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}=\frac{2+7}{3}=\frac{9}{3}=\boxed{3}$

b. $\frac{20}{5}\cdot\frac{15}{8}=\frac{\cancelto{1}{4}\cdot 5\cdot 3\cdot \cancelto{1}{5}}{\cancelto{1}{5}\cdot\cancelto{1}{4}\cdot 2}$ Factorizando $20=4\cdot 5$ y $15=3\cdot 5$ y simplificando numerador con denominador.

$=\boxed{\frac{15}{2}}$

c. $\frac{4}{3}-\frac{5}{6}+2=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{2}-\frac{5}{6}+\frac{2}{1}\cdot\frac{6}{6}$ Transformando $\frac{4}{3}$ y 2 en fracciones equivalentes con denominador 6.

$=\frac{8}{6}-\frac{5}{6}+\frac{12}{6}$

$=\frac{8-5+12}{6}$ Sumando fracciones.

$=\frac{\cancelto{5}{15}}{\cancelto{2}{6}}$ Simplificando.

$=\boxed{\frac{5}{2}}$

d. $\left(\frac{12}{6}+\frac{8}{3}\right)\left(\frac{12}{6}-\frac{8}{3}\right)=\left(\frac{\cancelto{6}{12}}{\cancelto{3}{6}}+\frac{8}{3}\right)\left(\frac{\cancelto{6}{12}}{\cancelto{3}{6}}-\frac{8}{3}\right)$ Simplificando $\frac{12}{6}$ a $\frac{6}{3}$ para igual denominadores dentro de cada paréntesis.

$=\left(\frac{6}{3}+\frac{8}{3}\right)\left(\frac{6}{3}-\frac{8}{3}\right)$

$=\frac{14}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$ Sumando y restando dentro de los paréntesis.

$=\boxed{-\frac{28}{9}}$ Multiplicando fracciones.

e. $\frac{2}{6}\div\frac{3}{8}=\frac{2}{6}\cdot\frac{8}{3}$ Para dividir dos fracciones se multiplica la primera fracción por el inverso de la segunda.

$=\frac{2\cdot 8}{6\cdot 3}$ Multiplicando.

$=\frac{\cancelto{8}{16}}{\cancelto{9}{18}}$ Simplificando.

$=\boxed{\frac{8}{9}}$

f. $\dfrac{\dfrac{7}{21}+\dfrac{1}{7}}{7} = \dfrac{\dfrac{7}{21}+\dfrac{3}{21}}{7}$ Transformando $\frac{1}{7}$ en una fracción equivalente con denominador 21.

$= \dfrac{\dfrac{10}{21}}{7}$ Sumando fracciones en el numerador.

$= \dfrac{10}{21}\cdot\dfrac{1}{7}$ Transformando la división de dos fracciones en el producto de la primera por el inverso de la segunda.

$= \boxed{\dfrac{10}{147}}$

Solución del ejercicio 8

A continuación, se simplifican las expresiones dadas

a. $4-(-5)=4+5=9$ Suma de opuestos

b. $-4-(-5)=-4+5=1$ Resta de negativos

c. $4(-5)=-20$ Multiplicación de dos números de distinto signo

d. $4+(-5)=4-5=-1$ Suma de un positivo con un negativo

e. $(-4)-(-5)=-4+5=1$ Resta de negativos

f. $-4(-5)=20$ Multiplicación de negativos

g. $-(4-(-5))=-(4+5)=-9$ Negativo del paréntesis

h. $4[3(x+1)-2]=4[3x+3-2]=4[3x+1]=12x+4$ Distributiva

i. $3(y-2x)+2(3x-3y)=3y-6x+6x-6y=-3y$ Términos semejantes

j. $-z(z+2)+2(1-z)=-z^2-2z+2-2z=-z^2-4z+2$ Distributiva y simplificación